PUISSANCES

I. PUISSANCES DE 10

1) PUISSANCES D'EXPOSANTS POSITIFS

Pour tout nombre n entier strictement positif, $10^n = \underbrace{10\times10\times...\times10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{10...0}_{n \text{ zéros}}$

Exemples : $10^2 = 10 \times 10 = 100$ $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$

Cas particuliers : $10^0 = 1$ $10^1 = 10$

2) PUISSANCES D'EXPOSANTS NEGATIFS

Pour tout nombre n entier strictement positif, $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10\times10\times...\times10}_{n \text{ facteurs}}} = \underbrace{0,0...01}_{\downarrow}$

n zéros (en tout) **ou**
n chiffres après la virgule

Exemples : $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$ $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$

3) ECRITURE SCIENTIFIQUE

Soit n un nombre entier positif et a un nombre relatif :
- Multiplier le nombre a par 10^n revient à déplacer la virgule de n rangs vers la droite.
- Multiplier le nombre a par 10^{-n} revient à déplacer la virgule de n rangs vers la gauche .

Exemples : $2,365 \times 10^2 = 236,5$ $2,3 \times 10^3 = 2\,300$
$1562 \times 10^{-3} = 1,562$ $12 \times 10^{-4} = 0,0012$

On appelle **notation scientifique** d'un nombre, la notation de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal avec un seul chiffre différent de zéro avant la virgule ($1 \leq a < 10$).

Exemples : $72\,500 = 7,25\times10^4$ $0,0141 = 14,1\times10^{-3}$

Pour comparer deux nombres en écriture scientifique :
- On commence par regarder les puissances : les nombres sont classés dans le même ordre que les exposants.
- Si elles sont égales : les nombres sont classés dans le même ordre que leur coefficients

Exemples : $2,259\times10^4 < 4,7\times10^5$ car $4 < 5$
$2,259\times10^4 < 7,25\times10^4$ car $2,259 < 7,25$

4) Operations sur les puissances de 10

Quels que soient les nombres entiers n et m : $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ $\quad \frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ $\quad (10^n)^m = 10^{n \times m}$

Exemples : $10^{-1} \times 10^3 = 10^{-1+3} = 10^2 = 100$ $\quad \frac{10^4}{10^6} = 10^{4-6} = 10^{-2} = 0{,}01$ $\quad (10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6 = 1000000$

II. Puissances entieres des nombres relatifs

1) Puissances d'exposants positifs

Pour tout nombre entier n strictement positif et tout nombre relatif a, $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Exemple : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

2) Puissances d'exposants negatifs

Pour tout nombre entier n strictement positif et tout nombre relatif a, a^{-n} est l'inverse de a^n, c'est-à-dire : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemple : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

3) Signe d'une puissance

Remarque : Si a est un nombre positif et n un nombre entier, a^n est toujours positif.

Soit a un nombre **négatif** et n un nombre entier positif :
- Si n est **pair**, a^n est toujours un nombre **positif**.
- Si n est **impair**, a^n est toujours un nombre **négatif**.

Exemples : $(-2)^3$ est négatif car 3 est un nombre impair. En effet $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
$(-5)^4$ est un nombre positif car 4 est pair. En effet $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$

Remarque : $(-5)^4 \neq -5^4$
$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$; c'est (-5) qui est mis à la puissance 4.
$-5^4 = -5 \times 5 \times 5 \times 5 = -625$; seul le 5 est élevé à la puissance 4, le signe moins se mettant devant.

4) Operations sur les puissances

Quels que soient les nombres entiers n et m et les nombres relatifs a et b :

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \times m}$ $\quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$